

Applications depuis $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ et une conjecture de N. Kuhn

G. Gaudens, L. Schwartz

5 mai 2010

Résumé

On démontre une conjecture due à N. Kuhn concernant la cohomologie singulière à coefficients mod p des espaces, comme module instable sur l'algèbre de Steenrod. Notre démonstration de ce résultat, déjà connu en caractéristique 2, fait appel à une méthode nouvelle, qui fonctionne en toute caractéristique. De cette manière on rétablit un résultat de [S98] dont la preuve est incomplète dans le cas d'un nombre premier impair.

Abstract.

We settle a conjecture due to N. Kuhn about the mod p cohomology of spaces considered as unstable modules over the Steenrod algebra. This result is already known to hold in characteristic 2. The method presented here is essentially new and works for all characteristics. In doing so we fix a gap in [S98] concerning the odd prime case.

Table des matières

1	Introduction, la conjecture de Kuhn.	1
2	Construction d'applications et théorie d'obstruction	3
2.1	Application algébrique	4
2.2	Construction de l'application φ_s	4
2.3	Impossibilité d'étendre φ_s et conséquences	5
3	Cohomologie des espaces d'applications pointées	5
4	Conjecture de Kuhn	6
4.1	Réduction du problème	6
4.2	Connexité de QH^*X_s et contradiction	6
5	De l'utilisation des espaces profinis	7

1 Introduction, la conjecture de Kuhn.

Soit p un nombre premier. La cohomologie $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ que l'on notera H^*X d'un espace X est naturellement un objet de la catégorie \mathcal{U} des modules instables sur l'algèbre de Steenrod [S94]. Cette catégorie est munie,

comme toute catégorie abélienne, d’une filtration naturelle, dite de Krull, par des sous-catégories épaisses stables par colimites :

$$\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_2 \subset \dots \subset \mathcal{U}$$

La sous-catégorie \mathcal{U}_0 est exactement la sous-catégorie des modules localement finis [S94] obtenue comme colimite de modules finis. Autrement dit cette sous-catégorie est obtenue à partir des objets simples de \mathcal{U} , les modules $\Sigma^n \mathbb{F}_p$, par extensions et colimites. Les termes suivants sont définis itérativement comme suit : \mathcal{U}_n est ‘l’image inverse’ dans \mathcal{U} de la sous-catégorie abélienne \mathcal{C} du quotient $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$ obtenue à partir des objets simples de $\mathcal{U}/\mathcal{U}_{n-1}$ par extensions et colimites. La catégorie \mathcal{U} n’est pas la réunion des \mathcal{U}_n .

La filtration de Krull est caractérisée par :

Théorème 1.1. [S94] *Soit \bar{T} le foncteur de lannes réduit, adjoint à gauche du produit tensoriel par $\tilde{H}^*(B\mathbb{Z}/p)$. Un module instable M est dans \mathcal{U}_n si et seulement si $\bar{T}^{n+1}(M) = \{0\}$.*

Un bref rappel de la théorie de Lannes apparaît en section 3. Tout module instable M est également muni de sa filtration nilpotente $\{M_s\}_{s \geq 0}$ qui est décroissante, séparée et naturelle, et dont les sous-quotients sont les suspensions itérées de modules instables réduits, plus précisément :

$$M_s/M_{s+1} = \Sigma^s R_s M$$

où $R_s M$ est réduit (voir [S94]). L’objet du présent article est de démontrer le résultat suivant conjecturé par N. Kuhn.

Théorème 1.2. *Soit X un espace. Si la cohomologie H^*X est dans un cran fini de la filtration de Krull, alors H^*X est localement finie. En d’autres termes, si H^*X est dans \mathcal{U}_n pour un certain n , alors H^*X est dans \mathcal{U}_0 .*

Si cet énoncé ne fait apparaître que la filtration de Krull, on verra que la démonstration en repose sur les rapports entre filtration de Krull et filtration nilpotente.

Afin de donner du relief à ce résultat, observons que la catégorie \mathcal{U} possède une infinité d’objets qui sont dans un cran fini de la filtration de Krull et qui ne sont pas localement finis, par exemple les générateurs projectifs $F(n)$ et leurs suspensions [S94] ; et qu’à l’inverse, la cohomologie modulo p d’un espace d’Eilenberg-Mac Lane $K(\mathbb{Z}/p, n)$ pour $n > 0$, ainsi que la cohomologie modulo p d’un groupe fini (d’ordre divisible par p), sont des modules instables qui n’appartiennent à \mathcal{U}_n pour aucun entier n . Ce résultat était déjà connu pour $p = 2$ [S01, DG03]. Il corrige une erreur qui concerne le cas d’un nombre premier impair dans l’article [S98] du second auteur. On reviendra plus loin sur ce point. L’approche présentée ici est nouvelle et unifie le cas $p = 2$ avec le cas où p est impair. Ce résultat implique le corollaire suivant (également conjecturé par Kuhn) :

Corollaire 1.3. *Soit X un espace. Si la cohomologie H^*X a une famille finie de générateurs comme module instable sur l’algèbre de Steenrod, alors H^*X est de dimension finie comme \mathbb{F}_p -espace vectoriel.*

Observons que ce résultat est essentiellement instable : la cohomologie modulo p d’un spectre d’Eilenberg-Mac Lane $H\mathbb{Z}/p$ est monogène comme module sur l’algèbre de Steenrod, mais n’est pas de dimension finie comme \mathbb{F}_p -espace vectoriel.

On dérive le Corollaire 1.3 du Théorème 1.2 en observant que la catégorie \mathcal{U} possède un système de générateurs projectifs, et que chacun d’entre eux est dans un cran fini de la filtration de Krull [S94]. Il s’ensuit qu’un module instable finiment engendré est dans un cran fini de la filtration de Krull, car celle-ci est une filtration croissante par des sous-catégories épaisses. Suivant le Théorème 1.2, si la cohomologie H^*X a un nombre fini de générateurs comme module instable, alors elle est localement finie. Mais un module finiment engendré et localement fini doit être de dimension finie comme \mathbb{F}_p -espace vectoriel.

L’article est organisé comme suit. Dans la fin de l’introduction on explique où se situe l’erreur dans [S98]. Dans la première partie on rappelle brièvement la réduction de Kuhn du problème. On se donne un module instable M satisfaisant aux hypothèses requises, et étant en particulier la cohomologie d’un espace X ; la cohomologie de X est de plus supposée s -nilpotente ($s > 0$) exactement. Puis on construit une application algébrique, réalisable topologiquement par une application φ , de $H^*(\Omega\Sigma X)$ vers $\Sigma^s \tilde{H}^*B\mathbb{Z}/p$. On montre ensuite que l’application φ ne peut s’étendre à $\Sigma^{s-1}K(\mathbb{Z}/p, 2)$ le long de l’application naturelle $\Sigma^s B\mathbb{Z}/p \rightarrow B\mathbb{Z}/p$, car l’action des opérations de Steenrod ne serait pas respectée.

Dans les deux parties finales on montre que les groupes d’obstructions à l’extension sont nuls, ce qui mène à la contradiction. La dernière construction est réminiscente de celle de H. Miller à la fin de son article sur la conjecture de Sullivan aux Annals [Mil84].

La preuve donnée pour le cas où p impair dans [S98, Section 3] contient une erreur. L'approche de [K08] ne traite que le cas $p = 2$ et présenterait une difficulté analogue à celle de [S98] pour p impair d'après M. Stelzer. L'objet du présent article est donc également de montrer comment éviter le problème rencontré dans [S98].

Il est expliqué dans cet article pourquoi la méthode utilisée pour le cas $p = 2$ ne peut l'être pour p impair sans modification. L'analogue (impair) des classes considérées pour traiter du cas $p = 2$ se trouvent sur la colonne $-p$ de la suite spectrale d'Eilenberg-Moore et peuvent donc supporter une différentielle d_{p-1} non triviale, pour $p = 2$ il n'y a évidemment pas de différentielle ! En fait on a la formule (voir [Sm])

$$d_{p-1}(x \otimes \dots \otimes x) = \lambda \beta P^k(x)$$

avec $k = \frac{|x|-1}{2}$. Si l'homomorphisme de Bockstein est trivial dans le module considéré la méthode fonctionne comme pour $p = 2$ et redonne le résultat de [K95] sans faire appel au théorème sur l'invariant de Hopf ou à d'autres résultats profonds de théorie de l'homotopie. En fait ceci étend même le théorème de Kuhn de [K95] qui montre que pour qu'un module (ou une algèbre instable) du type considéré soit (éventuellement) réalisable il faut que des homomorphismes de Bockstein soient non triviaux entre deux étages de la filtration nilpotente du module considéré, la méthode ci dessus montre que ce doit être le cas entre les deux premiers étages non triviaux.

Par contre la méthode proposée dans [S98] pour 'éliminer' le Bockstein : prendre le plan projectif sur l'espace des lacets est inexacte, et échoue sans argument supplémentaire. Il reste qu'en examinant de plus près des cas particuliers on voit rapidement apparaître des contradictions qui forcent la nullité de l'homomorphisme de Bockstein et permettent donc de se ramener au cas précédent.

A titre d'exemple considérons le cas où l'algèbre instable initialement considéré a un quotient non-trivial dans $\mathcal{N}il_1$ et que tous les produits sont nuls. Cette dernière condition est facile à assurer en remplaçant l'espace supposé exister par un quotient. Soit x la classe considérée plus haut, de degré $2k + 1$ et $y = P^k x$, $k = p^h$ pour un certain h . Si l'homomorphisme de Bockstein est non trivial sur x il l'est sur y car le module considéré est de la forme $A \otimes \Phi^{h+1} F(1)$ (voir [S98]). Rappelons que $F(1)$ est le module instable librement engendré en degré 1, qui s'identifie au module des primitifs de la coalgèbre $H^* B\mathbb{Z}/p$.

L'élément $y^{\otimes p-1} \otimes x$ existe sur la colonne $-p$ du terme E_2 de la suite spectrale et ne peut être tué par une différentielle d_i , $i \leq p - 1$ pour des raisons de degrés, quitte encore une fois à prendre un quotient de l'espace initial. Toutes les différentielles sont nulles sur cet élément (en particulier il n'y a pas de place pour des produits de Massey non triviaux, voir [McCleary85], chapitres 7 et 8). On a, comme plus haut,

$$d_{p-1}(y \otimes \dots \otimes y) = \lambda \beta P^{pk}(y)$$

et donc :

$$0 = P^k d_{p-1}(y \otimes \dots \otimes y \otimes x) = d_{p-1} P^k(y \otimes \dots \otimes y \otimes x) = \lambda \beta P^{pk}(y) \neq 0$$

On a donc une contradiction si $\lambda \neq 0$.

Cependant, pour établir le résultat en toute généralité, il convient de procéder autrement, comme il va décrit ci-dessous.

Le corollaire est démontré pour $p = 2$ via la non-réalisabilité comme cohomologie d'un espace topologique de certains modules instables finis dans [S98] et [K08]). Cette approche ne fonctionne en l'état que pour $p = 2$, il n'est pas immédiatement clair comment appliquer les techniques ci-dessous aux complexes finis bien quelques faits suggèrent que des adaptations puissent être trouvées.

Dans ce qui suit on fixe un nombre premier p et on suppose que les espaces sont p -complets. Ceci n'entraîne pas de perte de généralité. On supposera aussi que l'homologie modulo p des espaces considérés est de dimension finie en chaque degré et que cette propriété persiste si on applique le foncteur T de Lannes. On montrera dans une dernière section comment s'affranchir de cette condition en utilisant la théorie des espaces profinis suivant [DG03].

2 Construction d'applications et théorie d'obstruction

On revient dans cette section sur la stratégie de démonstration du théorème. On établit le résultat par l'absurde : on suppose qu'il existe un espace dont la cohomologie n'est pas localement finie mais appartient à un cran fini de la filtration de Krull \mathcal{U}_n avec $n > 0$. Dans [K95] Kuhn montre que l'on peut se ramener au cas où $n = 1$. On suppose donc donné un espace dont la cohomologie est dans \mathcal{U}_1 , mais pas dans \mathcal{U}_0 . On montre alors qu'il existe une application de cet espace (ou d'un espace déduit de cet espace) vers une

suspension d'un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ telle que l'application induite en cohomologie ne commute pas aux opérations de Steenrod.

On ne rappelle pas ici en détail comment se ramener à supposer que le module est dans \mathcal{U}_1 , ceci est fait dans [K95] et repris dans les articles suivants. Simplement pour montrer la filiation de la construction ci-dessous avec celle de Kuhn observons que son outil central est l'application du théorème de Lannes sur la cohomologie des espaces fonctionnels de source $B\mathbb{Z}/p$ à la cofibre de $X \rightarrow \text{map}(B\mathbb{Z}/p, X)$, dont la cohomologie sous des hypothèses favorables, est donnée par $\bar{T}(H^*X)$.

On commence par montrer comment construire des applications réalisant certaines flèches algébriques.

2.1 Application algébrique

Soit X_s un espace s -connexe dont la cohomologie réduite est exactement s -nilpotente avec $s > 0$ et non localement finie. On suppose de plus que $R_s H^* X_s$ est dans \mathcal{U}_1 . Un module réduit dans \mathcal{U}_1 est la somme d'un module concentré en degré 0 et d'un sous-module non trivial d'une somme directe $\oplus_{\lambda \in \Lambda} F(1)$ [S98]. En sélectionnant un λ_0 dans l'ensemble d'indices Λ de la somme on a une application algébrique non triviale

$$\varphi_s^* : H^* X_s \rightarrow \Sigma^s R_s H^* X_s \rightarrow \Sigma^s F(1) \subset \Sigma^s H^* B\mathbb{Z}/p .$$

Dans la sous-section qui suit, on montre que l'application φ_s^* est induite par une application d'espaces :

Lemme 2.1. *Il existe une application $\varphi_s : \Sigma^s B\mathbb{Z}/p \rightarrow X_s$ induisant l'application φ_s^* en cohomologie modulo p .*

2.2 Construction de l'application φ_s

Nous donnons deux solutions pour l'existence d'une telle application, voici la première.

On suppose donc $R_s H^* X_s$ est dans \mathcal{U}_1 , avec $H^* X_s$ exactement s -nilpotent. Posons $X_t = \Omega^{s-t} X_s$. D'après [S01, Théorèmes 1.5 et 1.6] l'espace $\Omega^{s-1} X_s$ possède une cohomologie réduite exactement 1-nilpotente, et l'application naturelle $R_s H^* X_s \rightarrow R_1 H^* X_1$ a un noyau et un conoyau nilpotent. Ce 'F-isomorphisme' selon la terminologie de [S01] est induit par l'évaluation

$$\Sigma^{s-1} \Omega^{s-1} X_s = \Sigma^{s-1} X_1 \rightarrow X_s .$$

De φ_s^* on déduit alors φ_1^*

$$\varphi_1^* : H^* X_1 \rightarrow \Sigma^1 R_1 H^* X_1 \rightarrow \Sigma F(1) \subset \Sigma H^* B\mathbb{Z}/p .$$

Ceci ramène au cas où on veut construire

$$\varphi_1 : \Sigma B\mathbb{Z}/p \rightarrow X_1 = \Omega^{s-1} X_s ,$$

car si on y parvient, l'application adjointe

$$\varphi_s : \Sigma^s B\mathbb{Z}/p \rightarrow X_s$$

jouit des propriétés désirées. Rappelons maintenant que $H^* \Sigma B\mathbb{Z}/p$ est \mathcal{U} -injectif. Il s'ensuit, que le morphisme de Hurewicz

$$\text{map}(\Sigma B\mathbb{Z}/p, X) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{K}}(H^* X, H^* \Sigma B\mathbb{Z}/p)$$

est surjectif [LS89, GL87]. Ici \mathcal{K} désigne la catégorie des algèbres instables [S94]. Ceci assure l'existence d'une application φ_1 , une fois observé que φ_1^* est un morphisme dans \mathcal{K} .

Que l'application algébrique φ_s^* soit réalisable topologiquement résulte également de l'argument ci dessous. On suppose que X_s est un H -espace et que l'on peut calculer la cohomologie de $\text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, X_s)$ comme il est indiqué en section 3. En particulier la cohomologie de cet espace est exactement $(s-1)$ -connexe. On peut choisir une classe dans le s -ième groupe d'homologie et la représenter par une application de S^s dans $\text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, X_s)$. On considère l'application adjointe $S^s \times B\mathbb{Z}/p \rightarrow X_s$. Elle est triviale sur $S^s \times *$, car c'est l'adjointe d'une application à valeurs dans l'espace des applications pointées. Elle est homotopiquement triviale sur $S^s \times *$ car on peut supposer sans restriction que X_s est au moins $2s$ -connexe. Par le théorème de Lannes sur les applications de source $B\mathbb{Z}/p$ [La92], puisque $\bar{H}^* X_s$ est nilpotente, elle est homotopiquement triviale sur $* \times B\mathbb{Z}/p$.

On récupère donc une application $\Sigma^s B\mathbb{Z}/p = S^s \wedge B\mathbb{Z}/p \rightarrow X_s$ qui a l'action prescrite en cohomologie.

2.3 Impossibilité d'étendre φ_s et conséquences

Lemme 2.2. *L'application $\varphi_s : \Sigma^s B\mathbb{Z}/p \rightarrow X_s$ ne s'étend pas en une application $\Sigma^{s-1}K(\mathbb{Z}/p, 2) \rightarrow X_s$ le long de l'application $\Sigma^{s-1}\psi : \Sigma^s B\mathbb{Z}/p \rightarrow \Sigma^{s-1}K(\mathbb{Z}/p, 2)$.*

En effet, l'existence d'une telle extension permettrait de factoriser le morphisme de modules instables non trivial $\varphi_s^* : \tilde{H}^* X_s \rightarrow \Sigma \tilde{H}^* B\mathbb{Z}/p$ au travers de $\tilde{H}^* \Sigma^{s-1}K(\mathbb{Z}/p, 2)$ ce qui est impossible, car il n'y a pas d'applications non triviales d'une suspension s -ième vers une suspension $(s-1)$ -ième d'un module réduit.

L'espace $K(\mathbb{Z}/p, 2)$ se reconstruit à partir $B\mathbb{Z}/p$ à l'aide de la construction de Milnor. On a une filtration $* = C_0 \subset C_1 = \Sigma B\mathbb{Z}/p \subset C_2 \subset \dots \subset \cup_n C_n = K(\mathbb{Z}/p, 2)$, et un diagramme où les flèches de la ligne supérieure sont homotopiquement triviales (et B désigne $B\mathbb{Z}/p$) :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & B^{*n} & \longrightarrow & B^{*n+1} & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & C_n & \longrightarrow & C_{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

d'où on déduit des cofibrations à homotopie près :

$$\Sigma^{n-1}B^{\wedge n} \rightarrow C_n \rightarrow C_{n+1} \rightarrow \Sigma^n B^{\wedge n}$$

Puisque l'application considérée plus haut ne peut s'étendre à $\Sigma^{s-1}K(\mathbb{Z}/p, 2)$ on a nécessairement :

Lemme 2.3. *Il existe un entier n tel que le groupe $[\Sigma^{n+s-2}(B\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}, X_s]$ est non trivial.*

On a $[\Sigma^{n+s-2}(B\mathbb{Z}/p)^{\wedge n}, X_s] = \pi_{n+s-2} \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p^{\wedge n}, X_s)$.

Lemme 2.4. *Il existe un entier n tel que $H^* \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p^{\wedge n}, X_s)$ n'est pas $(n+s-2)$ -connexe.*

3 Cohomologie des espaces d'applications pointées

Soit H la cohomologie modulo p de l'espace classifiant $B\mathbb{Z}/p$, et soit \bar{H} sa cohomologie réduite. Les endofoncteurs de la catégorie \mathcal{U}

$$M \mapsto M \otimes H; \quad M \mapsto M \otimes \bar{H}$$

possèdent des adjoints à gauche respectifs T et \bar{T} . Les foncteurs T et \bar{T} sont tous deux exacts. De plus T commute aux produits tensoriels dans le sens où l'application naturelle

$$T(M_1) \otimes T(M_2) \rightarrow T(M_1 \otimes M_2)$$

donnée formellement par les propriétés d'adjonction, est un isomorphisme pour tous M_1 et M_2 . Le scindement naturel $H \cong \mathbb{F}_p \oplus \bar{H}$ dans la catégorie \mathcal{U} conduit à un scindement naturel

$$TM \cong \bar{T}M \oplus M.$$

Supposons l'espace X p -complet, 1-connexe, et que TH^*X soit de dimension finie en chaque degré. Alors, [La92], l'application naturelle :

$$TH^*X \rightarrow H^* \text{map}(B\mathbb{Z}/p, X)$$

adjointe de l'application induite en cohomologie par l'évaluation $B\mathbb{Z}/p \times \text{map}(B\mathbb{Z}/p, X) \rightarrow X$, est un isomorphisme d'algèbres instables. De plus le facteur $\bar{T}H^* \subset TH^*X$ identifie $\bar{T}H^*X$ avec la cohomologie réduite de ΔX , la cofibre homotopique de l'application naturelle $X \subset \text{map}(B\mathbb{Z}/p, X)$ donnée par les applications constantes.

Soit X un H-espace, typiquement un espace de lacets. On a alors un scindement

$$\text{map}(B\mathbb{Z}/p, X) \cong \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p, X) \times X.$$

Suivant [CCS07] on en déduit :

Lemme 3.1. $QH^* \text{map}_*(B\mathbb{Z}/p^{\wedge n}, X) = \bar{T}^n QH^*X$.

La connexité de l'idéal d'augmentation d'une algèbre connexe coïncide avec celle de ses indécomposables. En particulier, on déduit du Lemme 2.4 :

Proposition 3.2. *Supposons que l'application considérée ci dessus ne s'étende pas à tout $\Sigma^{s-1}K(\mathbb{Z}/p, 2)$ et que X_s soit un H -espace. Alors il existe un n tel que $QH^*\mathrm{map}_*(B\mathbb{Z}/p^{\wedge n+1}, X_s) = \bar{T}^n QH^*X_s$ ne soit pas $(n + s - 2)$ -connexe.*

On va montrer que dans le cas considéré ceci n'a pas lieu, ce qui achèvera la démonstration.

Remarque 3.3. *En général on ne sait pas calculer la cohomologie de l'espace des applications pointées. Il se trouve que sous les hypothèses sur le module A est de la forme $\Phi^k F(1) \otimes F$, F fini, et que l'on considère (s'il en existe) un espace p -complet X tel que $\tilde{H}^*X \cong A$ on peut calculer $H^*\mathrm{map}_*(B\mathbb{Z}/p, X)$ comme module instable. On commence par supposer que les conditions d'application du théorème de Lannes sont satisfaites (et que l'entier k est grand relativement à F). Notons Y la cofibre de l'application $X \rightarrow \mathrm{map}(B\mathbb{Z}/p, X)$. On montre alors que $\mathrm{map}(B\mathbb{Z}/p, X)$ est, à p -complétion près, homotopiquement équivalent au bouquet $X \vee Y$. Il résulte alors, par exemple, de [Strom03] que la suspension de l'espace d'applications pointées est homotopiquement équivalent à $\Sigma Y \vee (\Sigma Y \wedge \Omega X)$. On n'échappe pas donc à calculer la cohomologie de ΩX (de laquelle on tirera la contradiction). Il vaut donc mieux considérer la d'emblée comme il est fait ci-dessous le cas de l'espace des fonctions dans un espace de lacets.*

4 Conjecture de Kuhn

4.1 Réduction du problème

Supposons donné un espace Z tel que H^*Z n'est pas localement finie, mais appartienne à un cran fini \mathcal{U}_n de la filtration de Krull. Le module $R_0 \tilde{H}^*Z$ est nécessairement trivial, car dans le cas contraire, l'existence d'une classe non-réduite contredit le fait que H^*Z est de filtration de Krull finie (ce point est amplement documenté dans les articles précédents sur le sujet, ou simplement dans [S94] ; cela suit également de [GS05]. En utilisant les réductions données dans [K95] (voir aussi [DG03]), on obtient qu'il existe alors un espace connexe Z' dont la cohomologie réduite est exactement s -nilpotente avec $s > 0$ et non localement finie. De plus on peut supposer la cohomologie de X est $2s$ -connexe et $R_s H^*X$ est dans \mathcal{U}_1 . On pose alors $X_s := \Omega \Sigma X$.

4.2 Connexité de QH^*X_s et contradiction

La structure de H^*X_s comme module instable, en fonction de H^*X est très classique et donnée par le théorème de Bott-Samelson (voir [GW]) :

Théorème 4.1. *Soit $K := H^*X_s$, c'est une algèbre de Hopf. Elle est isomorphe à l'algèbre tensorielle $\mathbb{T}H^*X$*

- comme \mathbb{F}_p -espace vectoriel,
- comme module instable,
- comme coalgèbre avec le coproduit de déconcaténation,

*La filtration par la longueur des tenseurs sur $K \cong \mathbb{T}H^*X$ est multiplicative, et induit le produit de battage ('shuffle product') sur le gradué.*

Rappelons que \tilde{H}^*X_s est supposée s -nilpotente. L'algèbre de cohomologie est le produit tensoriel d'algèbres extérieures et d'algèbres polynomiales tronquées à hauteur p . Pour une telle algèbre instable, on va montrer :

Lemme 4.2. *Pour tout $n \geq 1$, $\bar{T}^{n+1}QK$ est $((n+1)s - 1)$ -connexe.*

Pour $s > 0$, l'inégalité $(n+1)s - 1 \geq n + s - 1$ produit une contradiction entre la Proposition 3.2 et le Lemme 4.2, ce qui établit le théorème. Il reste donc à démontrer 4.2 .

On considère la sous-algèbre K_h de K engendrée par le sous-module M_h des tenseurs de longueur non-nulle inférieure ou égale à h . On a donc par construction pour $h \geq 1$ un épimorphisme

$$M_h \rightarrow QK_h$$

Comme M_h est dans \mathcal{U}_h , il en est de même pour QK_h , de sorte que $\bar{T}^{h+1}QK_h = 0$.

On a $\mathrm{colim}_h QK_h = QK$, et comme \bar{T} commute aux colimites, on a

$$\bar{T}^{n+1}QK \cong \bar{T}^{n+1}Q(\mathrm{colim}_h K_h) \cong \mathrm{colim}_h (\bar{T}^{n+1}QK_h) \cong \bar{T}^{n+1}\mathrm{colim}_{h>n} QK_h$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
M_h & \longrightarrow & M_{h+1} & \longrightarrow & M_{h+1}/M_h & \longrightarrow & \{0\} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
QK_h & \longrightarrow & QK_{h+1} & \longrightarrow & Q(K_{h+1}/(\bar{K}_h.K_{h+1})) & \longrightarrow & \{0\}
\end{array}$$

dont les flèches verticales sont des épimorphismes, et dont les suites horizontales sont exactes, et ce pour tout $h \geq 1$. En appliquant le foncteur exact \bar{T}^{n+1} à suite exacte horizontale inférieure du diagramme pour $h = n$, on voit que

$$\bar{T}^{n+1}QK_{n+1} \cong \bar{T}^{n+1}Q(K_{n+1}/(\bar{K}_n.K_{n+1})) .$$

M_{n+1}/M_n s'identifie comme module instable avec $(\tilde{H}^*X)^{\otimes n+1}$ - qui est $(n+1)s$ -nilpotent, donc $((n+1)s-1)$ -connexe. Il suit que $\bar{T}^{n+1}QK_{n+1}$ est $((n+1)s-1)$ -connexe. Ensuite pour $h \geq n+1$, en utilisant la suite exacte

$$\bar{T}^{n+1}QK_h \rightarrow \bar{T}^{n+1}QK_{h+1} \rightarrow \bar{T}^{n+1}Q(K_h/(K_h.\bar{K}_{h+1})) \rightarrow \{0\}$$

et le fait que $\bar{T}^{n+1}Q(K_{h+1}/(K_h.K_{h+1}))$ est un quotient de $\bar{T}^{n+1}(H^*X)^{\otimes h+1}$ - qui est $((h+1)s-1)$, connexe on voit que $\bar{T}^{n+1}QK_{h+1}$ est $((n+1)s-1)$ -connexe si $\bar{T}^{n+1}QK_h$ l'est.

Par récurrence sur $h \geq n+1$ et passage à la colimite, on en déduit que $\bar{T}^{n+1}QK_h$ est $((n+1)s-1)$ -connexe, comme annoncé.

5 De l'utilisation des espaces profinis

Nous donnons dans cette dernière section, comme annoncé en introduction, les éléments de la théorie des espaces profinis qui nous permettent de travailler sans hypothèse de finitude, et qui n'apparaissent pas déjà dans [Mo96, DG03]- auxquels nous renvoyons pour plus de détails.

Rappelons qu'un ensemble profini est un espace topologique muni d'une topologie qui le rend compact et complètement discontinu. La cohomologie modulo p H^*X d'un espace profini X , définie dans [Mo96], est naturellement munie d'une structure d'algèbre instable sur l'algèbre de Steenrod. Morel a montré que les isomorphismes en cohomologie continue modulo p et les monomorphismes sont les équivalences faibles et les cofibrations d'une catégorie de modèles simpliciale sur la catégorie des espaces profinis, pour laquelle il existe un remplacement fibrant fonctoriel $Y \rightarrow \hat{Y}$ (voir [DG03]). Le foncteur d'oubli de la topologie des espaces profinis dans les espaces ordinaires possède un adjoint à gauche $X \rightarrow \hat{X}$ appelé *complétion profinie*. L'application naturelle $H^*Y \rightarrow H^*\hat{Y}$ est un *isomorphisme* d'algèbres instables, donc de modules instables. En utilisant les remarques qui suivent sur les espaces fonctionnels et la connexité pour les espaces profinis, le lecteur se convaincra qu'on montre le résultat suivant, en remplaçant *espace* par *espace profini* dans le corps de l'article.

Théorème 5.1. *Soit X un espace profini. Si la cohomologie H^*X est dans un cran fini de la filtration de Krull, alors H^*X est localement finie. En d'autres termes, si H^*X est dans \mathcal{U}_n pour un certain n , alors H^*X est dans \mathcal{U}_0 .*

Avec l'observation que la cohomologie d'un espace ordinaire est canoniquement isomorphe à celle de sa compétion profinie, on obtient les résultats énoncés en introduction *sans hypothèse de finitude*.

Pour tout espace profini Y et tout ensemble fini simplicial, on peut former un espace profini fonctionnel $\text{map}(X, Y)$, limite inverse du système $\text{map}(X, \hat{Y}(-))$, où $\hat{Y}(-)$ désigne le remplacement fibrant fonctoriel de [Mo96], voir également [DG03]. On n'aura uniquement à considérer le cas où $X = \Sigma^s B\mathbb{Z}/p^{\wedge n}$, qui est bien un ensemble fini simplicial. Pour X et Y des espaces profinis pointés, on a la notion d'un espace profini fonctionnel pointé $\text{map}_*(X, Y) = \lim \text{map}_*(X, \hat{Y}(-))$. Dans le cas où $X = S^1$, on obtient $\Omega Y := \text{map}_*(S^1, Y)$. On peut définir la suspension d'un espace profini pointé $X = \lim X(-)$ comme $\Sigma X := \lim \Sigma X(-)$; la formule d'adjonction usuelle $\text{hom}(\Sigma Z, Y) \cong \text{hom}(Z, \Omega Y)$ est alors valide, où hom désigne l'ensemble des morphismes entre deux espaces profinis. Le foncteur $\text{map}_*(-, Y)$ est une fibration. En particulier $\text{map}_*(-, Y)$ transforme les suites de Puppe de cofibrations en suite de Puppe de fibrations. Pour tout ensemble profini pointé Y , on peut introduire la notion d'ensembles/groupes d'homotopie profinis $\pi_n(Y) := \lim \pi_n \hat{Y}(-)$. Ces derniers sont munis d'une topologie profinie naturelle. Une fibration entres espaces pointés induit une suite exacte longue sur les groupes d'homotopie, tout comme dans le cas usuel. Soit $[X, Y]$ l'ensemble des classes d'homotopie simpliciale d'applications continues pointées $X \rightarrow \hat{Y}$. On a une formule $[X, Y] := \pi_0 \text{map}_*(X, Y)$ et il s'ensuit que :

$$[\Sigma^n X, Y] \cong \pi_0 \text{map}_*(\Sigma_n X, Y) \cong \pi_0 \text{map}_*(X, \Omega^n Y) \cong \pi_0 \Omega^n \text{map}_*(X, Y) \cong \pi_n \text{map}_*(X, Y)$$

Nous notons enfin la version profinie du théorème de Hurewicz :

Théorème 5.2. *Soit $n \geq 0$ et soit X un espace profini connexe pointé. Alors $\pi_i X$ est trivial pour tout $i \leq n$ si et seulement si $\tilde{H}^i X$ est trivial pour tout $i \leq n$. Enfin, si $\pi_l X$ est le groupe d'homotopie de X non trivial de plus bas degré, alors $H^l(X)$ s'identifie au groupe des homomorphismes continus $\pi_l X \rightarrow \mathbb{Z}/p$.*

Références

- [CCS07] Natàlia Castellana, Juan A. Crespo, Jérôme Scherer, *Deconstructing Hopf spaces*, Invent. Math. 167, **(2007)**, no. 1, 1–18.
- [DG03] François Xavier Dehon, Gérald Gaudens, *Espaces profinis et problèmes de réalisabilité*, AGT 3, **(2003)**, 399–433.
- [GS05] Gérald Gaudens, Lionel Schwartz, *Un théorème d'annulation en cohomologie de Mac Lane*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 341, **(2005)**, no. 2, 119–122.
- [GL87] Paul Goerss, Jean Lannes, *Realizing unstable injectives*, Math.Z. 196, **(1987)**, 239–248.
- [GLM92] Paul Goerss, Jean Lannes, Fabien Morel, *Vecteurs de Witt non commutatifs et représentabilité de l'homologie mod p* , Invent. Math. 108, **(1992)**, no. 1, 163–227.
- [K95] Nicholas Kuhn, *On topologically realizing modules over the Steenrod algebra*, Ann. of maths 141, **(1995)**, 321–347.
- [K08] Nicholas Kuhn, *Topological non-realization results via the Goodwillie tower approach to iterated loop-space homology*, AGT 8, **(2008)**, 2109–2129.
- [La92] Jean Lannes, *Sur les espaces fonctionnels dont la source est le classifiant d'un p -groupe abélien élémentaire*. Pub. I.H.E.S. 75**(1992)** 135–244.
- [LS89] Jean Lannes, Lionel Schwartz, *Sur la structure de \mathcal{A} -modules instables injectifs*, Topology 28 **(1989)** 153–169.
- [McCleary85] John McCleary, *User's guide to spectral sequences*, Publish or Perish Inc. **(1985)**.
- [Mil84] Haynes Miller, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Ann. of Math. (2) 120, **(1984)**, no. 1, 39–87.
- [Mo96] Fabien Morel, *Ensembles profinis simpliciaux et interprétation géométrique du foncteur T* , Bull. Soc. Math. France 124, **(1996)**, no. 2, 347–373.
- [MM65] John W. Milnor, John C. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. (2) 81, **(1965)**, 211–264.
- [S94] Lionel Schwartz, *Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, **(1994)**.
- [S98] Lionel Schwartz, *A propos de la conjecture de non-réalisation due à N. Kuhn*, Invent. Math. 134, **(1998)**, 211–227.
- [S01] Lionel Schwartz, *La filtration de Krull de la catégorie \mathcal{U} et la cohomologie des espaces*, AGT 1, **(2001)**, 519–548.
- [Sm] Lawrence Smith, *Lectures on the Eilenberg-Moore spectral sequence*, Springer LNM 134.
- [Strom03] Jeffrey Strom, *Miller spaces and spherical resolvability of finite complexes*, Fund. Math. 178, **(2003)**, no. 2, 97–108.
- [GW] George Whitehead, *Elements of homotopy theory*, GTM 6, **(1978)**, Springer Verlag.